Clase 20: Continuación

7 de enero de 2007

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ par, entonces

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x)dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x)dx,
\end{aligned}$$

porque $f(x)\operatorname{sen}(\omega x)$ es impar

$$\Longrightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos(\omega x) f(x)dx$$

cuando $f \in L^1(\mathbb{R})$ par (observe $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega)$).

Ejercicio 1. *Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ (par por (16)) entonces $\hat{f} = 2\int_0^{\infty} \cos(\omega x)\hat{f}(\omega)d\omega$.*

Ejercicio 2. *Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, f impar, entonces*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{-i}{\pi}\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x)dx,$$

$$f(x) = 2i\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x)\hat{f}(\omega)d\omega$$

(observe $\hat{f}(-\omega) = -\hat{f}(\omega)$).

1. Aplicaciones de la TF.

La variedad de aplicaciones de la TF tiene semejanzas con las que vimos en la TL.

Ejemplo 1. *(a) Puede demostrarse que cada ODLCC tiene una s.f. atemperada. Hallemos una s.f. atemperada de $L = d^2/dx^2 - k^2$ $(k > 0)$. Tenemos*

$$E''_{gen}(x) - k^2 E(x) = \delta(x) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2 \hat{E}(x) - k^2 \hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{E}(\omega) = -\frac{1/(2\pi)}{\omega^2 + k^2},$$

pero en la Clase 19 encontramos que

$$e^{-a|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{a}{\pi(\omega^2 + a^2)}, \quad a > 0,$$

entonces

$$\hat{E}(\omega) = -\frac{1}{2k}\frac{k}{\pi(\omega^2 + k^2)} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} E(x) = -\frac{1}{2k}e^{-k|x|}; \quad -\infty < x < \infty,$$

una s.f. que ya encontramos en el pasado.

(b) Sea $L = d^2/dx^2 - 3d/dx + 2$, entonces

$$LE(x) = \delta(x) \quad \Longrightarrow \quad E''_{gen}(x) - 3E'_{gen}(x) + 2E(x) = \delta(x)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} (-\omega^2 - 3i\omega + 2)\hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{E}(\omega) = -\frac{\frac{1}{2\pi}}{(\omega + i)(\omega + 2i)} = \frac{i/2\pi}{\omega + i} - \frac{i/2\pi}{\omega + 2i}. \tag{1}$$

Hallemos la TF de $\hat{g}(\omega) = \frac{i}{\omega + ai}$ $(a > 0)$. Tenemos

$$\hat{g}(\omega) = \frac{i}{\omega + ai} \quad \Longrightarrow \quad \omega\hat{g}(\omega) + ai\hat{g}(\omega) = i \quad \Longrightarrow \quad -i(i\omega)\hat{g}(\omega) + ai\hat{g}(\omega) = i$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} -ig'_{gen}(x) + aig(x) = 2\pi i\delta(x)$$

$$\Longrightarrow \quad g'_{gen}(x) - ag(x) = -2\pi\delta(x). \tag{2}$$

La ED $g'_{gen}(x) - ag(x) = 0$ tiene solución general Ce^{ax}, por lo que una solución de (2) debe tener la forma

$$g(x) = \begin{cases} Ae^{ax}; & x < 0 \\ Be^{ax}; & x > 0 \end{cases}$$

para ciertas constantes A, B. Pero para que $g(x)$ sea <u>*atemperada*</u> *es necesario que $B=0$, luego*

$$g(x) = Ah(-x)e^{ax} \implies g'_{gen}(x) = aAh(-x)e^{ax} - A\delta(x)$$

$$\overset{(2)}{\implies} aAh(-x)e^{ax} - A\delta(x) - aAh(-x)e^{ax} = -2\pi\delta(x) \implies A = 2\pi$$

$$\implies g(x) = 2\pi h(-x)e^{ax}$$

y

$$g(x) = 2\pi h(-x)e^{ax} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{i}{\omega + ai} = \hat{g}(\omega). \tag{3}$$

Verifiquemos (3):

$$g'_{gen}(x) = 2\pi a h(-x)e^{ax} - 2\pi\delta(x) = ag(x) - 2\pi\delta(x)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)\hat{g}(\omega) = a\hat{g}(\omega) - 1 \implies -\omega\hat{g}(\omega) = ai - i \implies \hat{g}(\omega) = \frac{i}{\omega + ai},$$

correcto. Ahora (1), (3)

$$\implies \hat{E}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(-x)[e^{x} - e^{2x}] = E(x)$$

es s.f. atemperada de L.

Ejemplo 2. *Mediante la TF podemos encontrar soluciones* <u>*atemperadas*</u> *de ED. Sea la ED*

$$u''(x) - u(x) + 2g(x) = 0; \quad -\infty < x < \infty \tag{4}$$

donde $g \in L^1(\mathbb{R})$ una función dada. Suponiendo la existencia de una solución $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, tenemos

$$(1) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2\hat{u}(\omega) - \hat{u}(\omega) + 2\hat{g}(\omega) = 0 \implies (\omega^2+1)\hat{u}(\omega) = 2\hat{g}(\omega)$$

$$\implies \hat{u}(\omega) = \frac{2\hat{g}(\omega)}{\omega^2+1} = \frac{2\pi}{\pi(\omega^2+1)}\hat{g}(\omega)$$

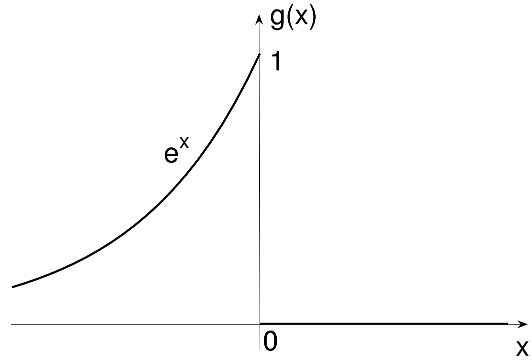
$$\underset{2.,\mathit{Clase\ 18}}{\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}} u(x) = g(x) * e^{-|x|},$$

(donde utilizamos que $e^{-|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\pi(\omega^2+1)}$, ver Clase 17). Como $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $e^{-|x|}$ también pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, $u(x) = g(x) * e^{-|x|}$ es una solución atemperada en $L^1(\mathbb{R})$ de (1).

Ejemplo 3. *La TF puede ser útil para hallar productos de convolución. Se pide hallar*

$$R(x) = h(x)e^{-x} * h(-x)e^{x}.$$

Sea $f(x) = h(x)e^{-x}$, $g(x) = h(-x)e^{x}$. *Hallemos* $\hat{g}(\omega)$:



$$g'_{gen}(x) = h(-x)e^{x} - \delta(x) = g(x) - \delta(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega\hat{g}(\omega) = \hat{g}(\omega) - \frac{1}{2\pi}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi(1 - i\omega)} = \frac{i}{2\pi(\omega + i)} \quad hbox(compareconelejemploanterior).$$

Similarmente encontramos

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi(1 + i\omega)},$$

luego con 2., Clase 18,

$$k(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi(1 + \omega^2)} = \hat{k}(\omega)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} k(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|},$$

es decir,

$$h(x)e^{-x} * h(-x)e^{x} = \frac{1}{2}e^{-|x|}; \quad -\infty < x < \infty.$$

Ejemplo 4. *La TF puede ser útil para hallar soluciones atemperadas de EC. Sea la EC*

$$h(x)e^{-x} * u(x) = e^{-|x|}; \quad -\infty < x < \infty. \tag{5}$$

Suponiendo la existencia de una solución atemperada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *tenemos*

$$(5) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega) = \hat{k}(\omega),$$

con $g(x) = h(x)e^{-x}$, $k(x) = e^{-|x|}$. *Pero* $g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$ *(ver ejemplo anterior) y* $R(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\pi(\omega^2+1)}$ *(Clase 17), luego*

$$2\pi\hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega) = \hat{k}(\omega) \implies 2\pi\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\pi(\omega^2+1)}$$

$$\implies \hat{u}(\omega) = \frac{1}{\pi(1-i\omega)} = \frac{i/\pi}{\omega+i} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(x) = 2h(-x)e^x; \;\; -\infty < x < \infty$$

(ver el primer ejemplo).

Es importante observar que no es necesario conocer $\hat{k}(\omega)$, *porque*

$$2\pi\hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega) = \hat{k}(\omega) \implies \frac{1}{1+i\omega}\hat{u}(\omega) = \hat{k}(\omega)$$

$$\begin{aligned} \implies \hat{u}(\omega) &= \hat{\omega} + i\omega\hat{k}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(x) = k(x) + k'_{gen}(x) \\ &= e^{-|x|} + \begin{cases} e^x; & x<0 \\ -e^{-x}; & x>0 \end{cases} = \begin{cases} 2e^x; & x<0 \\ 0; & x>0 \end{cases} = 2h(-x)e^{-x} \end{aligned}$$

como antes.

A continuación presentaremos aplicaciones a la resolución de problemas iniciales y de valor en la frontera para ED a derivadas parciales.

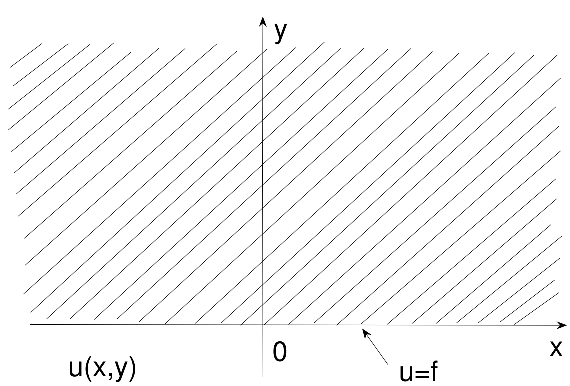
Ejemplo 5. *Sea el problema de Dirichlet*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \;\; -\infty < x < \infty, \; y \geq \tag{6}$$

$$u(x,0) = f(x), \;\; -\infty < x < \infty \tag{7}$$

$$u(x,y) \;\; \text{acotada} \tag{8}$$

donde $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dada*



La condición (8) asegura que para cada $y \geq 0$ fijo $u(x, y)$ es una función atemperada de x, por lo que existe $\hat{u}(\omega, y)$, la TF de $u(x, y)$ con respecto a x. Formalmente,

$$\hat{u}(\omega, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x, y) dx,$$

$$u_{yy}(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x, y) dx \right),$$

es decir,

$$u_{yy}(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\omega, y).$$

Ahora

$$(6) \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\omega)^2 \hat{u}(\omega) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0, \quad (7) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega),$$

entonces

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \omega^2 \hat{u}(\omega, y) = 0\,, \;\; y \geq 0 \tag{9}$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega). \tag{10}$$

La ED (9) tiene solución general

$$\hat{u}(\omega, y) = A(\omega) e^{-\omega y} + B(\omega) e^{\omega y}; \;\; -\infty < \omega < \infty, \; y \geq 0 \tag{11}$$

la cual es <u>atemperada</u> como función de ω sólo si $A(\omega) = 0$ para $\omega < 0$ y $B(\omega) = 0$ para $\omega > 0$.

<u>Caso $\omega < 0$:</u> $\hat{u}(\omega, y) = B(\omega) e^{\omega y} \overset{(10)}{\Longrightarrow} \hat{f}(\omega) = B(\omega) e^0 = B(\omega)$

$$\Rightarrow \;\; \hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega) e^{\omega y}; \;\; \omega < 0 \;\; (y \geq 0). \tag{12}$$

<u>Caso $\omega > 0$:</u> $\hat{u}(\omega, y) = A(\omega) e^{\omega y} \overset{(10)}{\Longrightarrow} \hat{f}(\omega) = A(\omega)$

$$\Rightarrow \;\; \hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega) e^{-\omega y}; \;\; \omega > 0 \;\; (y \geq 0). \tag{13}$$

Podemos resumir (12), (13) con una sola fórmula,

$$\hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega) e^{-y|\omega|}\,; -\infty < \omega < \infty, \, y \geq 0 \tag{14}$$

Como sabemos que $e^{-y|\omega|} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$ (ver Clase 19), tenemos con (2), Clase 18

$$(14) \;\; \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(x, y) = \frac{1}{2\pi} f(x) * \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\pi} f(x) * \frac{1}{x^2 + y^2}$$

(observe que no hace falta de TF $\hat{f}(\omega)$),

$$\Rightarrow \;\; u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi; \;\; -\infty < x < \infty, \;\; y \geq 0. \tag{15}$$

Observación importante: De (14) también tenemos en la fórmula de inversión

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)e^{-y|\omega|}d\omega; \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0, \tag{16}$$

pero para halar la integral es necesario conocer (calcular) $\hat{f}(\omega)$ (posiblemente un problema complicado) y sustituir la expresión para $\hat{f}(\omega)$ en la integral, complicándola aún más en general. En cambio la fórmula de la convolución que produce (15) a partir de (14) evita el cómputo de $\hat{f}(\omega)$ y es por lo tanto preferible en general la forma (15) de la solución (fin de la observación)

Consideramos 2 casos particulares

(a) Sea $f(x) = e^{iax}$. En este caso (16) es preferible ya que $e^{iax} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta_a(\omega)$ (tenemos $e^{iax} = e^{iax}1(x) \underset{6.,\text{Clase18}}{\xrightarrow{\mathcal{F}}} \hat{1}(\omega - a) = \delta(\omega - a) = \delta_a(\omega)$), por lo tanto

$$u(x,y) \stackrel{16}{=} < \delta_a(\omega), e^{i\omega x - y|\omega|} >= e^{-y|a| + iax}; \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0,$$

listo.

(b) Sea $f(x) = X_1(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otro } x. \end{cases}$. Entonces (15) da una integral fácil:

$$u(x,y) = \frac{y}{x}\int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-x}{y}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+x}{y}\right)\right]$$

(!verifique!). Aplicación de (16) daría $\left(X_1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\operatorname{sen}\omega}{\pi\omega}\right)$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}e^{-y|\omega|}d\omega = (\text{vía } e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i\operatorname{sen}(\omega x)$$

y resultando un integrando par) $= \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(\omega x)\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}e^{-y|\omega|}d\omega$, que luce muy complicado.